

# Problem Set 26: 树

提交截止时间：6 月 6 日 14:00

## Problem 1

试解答以下各问题：

- 1) 有多少非同构的 4 个顶点的树？
- 2) 饱和碳氢化合物  $C_4H_{10}$  有多少不同的同分异构体？
- 3)  $K_4$  有多少个不同的生成树？（假设各条边互不相同）

## Problem 2

证明或反驳：所有边数不超过图  $G$  的最小顶点度的树都与图  $G$  的某个子图同构（只考虑简单图）。

## Problem 3

标记树是其中每个顶点都指定了标记的树。当在两个标记树之间存在保持顶点标记的同构时，就称这两个标记树是同构的。

用集合  $\{0, 1, 2\}$  里不同的数来标记三个顶点的、非同构的标记树有多少种？用集合  $\{0, 1, 2, 3\}$  里不同的数来标记四个顶点的、非同构的标记树有多少种？

## Problem 4

令  $D = (d_1, d_2, \dots, d_n)$  为一正整数序列，且  $n \geq 2$ 。

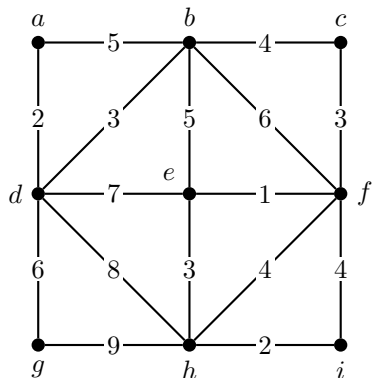
- 1) 若  $D$  恰好是某个树  $T$  的各个顶点的度数序列，试证明：

$$\sum_{i=1}^n d_i = 2(n-1)$$

- 2) 反之，试证明：若  $D$  满足上式，则存在一个树  $T$ ，使得  $D$  恰好是  $T$  的各个顶点的度数序列。

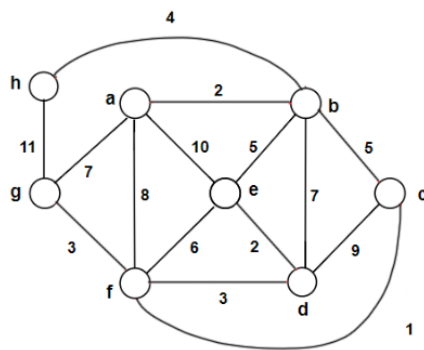
## Problem 5

试用 Kruskal 算法求所给带权图的最小生成树. (按顺序写出选取的边及 MST 的权值)



## Problem 6

试求以下无向带权图的最小生成树  $T$  (可复制此图并直接将图中所求最小生成树的边加粗), 并求此最小生成树的权值  $W(T)$ .



## Problem 7

证明或反驳: 每条边权重均不相同的带权图

- 1) 有唯一的最小生成树;
- 2) 有唯一的“次小生成树”满足, 存在一最小生成树的权值小于等于该树, 且其他生成树的权值均大于等于该树.

## Problem 8

令  $G$  为一无向带权连通图, 假设图中存在一个回路. 试证明: 在此回路上若存在一条边  $e$  其权值严格大于此回路上的其它各边, 则  $e$  不在  $G$  的任何最小生成树中.